2019—2020（2）《概率论》试卷(A)

一、填空题

1． 0.3，0.5； **2.** 5.6 ； **3.** 0.4 ，0.1；

4. **5**； **5.** $\frac{3}{8}$； 6. $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$ ，1， 0.5

二、选择题

1．B； 2．A； 3．C； 4．A； 5．D.

三、计算题

1．解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 axdx = \left[\frac{a}{2}x^2\right]_0^1 = 1 \Rightarrow a = 2$

$$(2)\, E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 2xdx = \left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{18}$$

（3） $P(-1 < X < 3) = \int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_0^1 2xdx = \left[x^2\right]_0^1 = 1$

2.（1）故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$1/20$	$9/20$	$9/20$	$1/20$

（2）故 Y 的分布列为

Y	-1	1	3	5
P	$1/20$	$9/20$	$9/20$	$1/20$

故 Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0 & y<-1\\ 1/20 & -1\le y<1\\ 10/20 & 1\le y<3\\ 19/20 & 3\le y<5\\ 1 & y\ge 5\end{cases}$$

（3） $E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$

$E(1+2X)=1+2E(X)=4$

3. 解：因为 $X: U[0,2]$,所以 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2},0\le x\le 2\\ 0,\quad 其他\end{cases}$ ，

$y=2x-1$ 严格单调，其反函数 $x=(y+1)/2=g^{-1}(y)$ 连续可导且 $x'_y=1/2$

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X\left[g^{-1}(y)\right]\left|\left[g^{-1}(y)\right]'\right|,-1\le y\le 3\\ 0,\quad 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4},-1\le y\le 3\\ 0,\quad 其他\end{cases}$$

$$P\{X\le 1,Y\le 4\}=P\{X\le 1\}=\int_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}$$

4. 解：设 A1＝{ 电压不超过 200 伏}，A2＝{电压在 200~400 伏之间}，A3＝{电压超过 240 伏}，B={电子元件损坏}

其中： $P(A_1)=P\{X\le 200\}=P\{\frac{X-220}{25}\le\frac{200-220}{25}\}$

$=\Phi(-0.8)=1-\Phi(0.8)=0.2$

$P(A_2)=P\{200\le X\le 240\}$

$=\Phi(\frac{240-220}{25})-\Phi(\frac{200-220}{25})$

$=2\Phi(0.8)-1=0.6$

$$\mathrm{P}(A_3) = P\{X \geq 240\} = 1 - \Phi(0.8) = 0.2$$

则用全概公式得：

$$\mathrm{P(B)=P}(A_1)P(B|A_1) + \mathrm{P}(A_2)P(B|A_2) + \mathrm{P}(A_3)P(B|A_3)$$

$$= 0.2\times0.1+0.6\times0.001+0.2\times0.2=0.0606$$

（2） $$P(A_3|B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.04}{0.0606} = 0.66$$

四、综合题

1．解：因为 X 与 Y 独立

所以 $P\{X=0，Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

$P\{X=0，Y=2\}=P\{X=0\}P\{Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$

$P\{X=1，Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{10}$

$P\{X=1，Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$

即：

X \ Y	1	2
0	1/10	3/20
1	3/10	9/20

（2） $P(X+Y\leq1.5)=P(X=0,Y=1)=0.1$

（3）

Z	0	1	2
P	$5/20$	$6/20$	$9/20$

2（1）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 dx\int_0^x Axy^2dy$$

$$= A\int_0^1\frac{1}{3}x^4dx = A\cdot\frac{1}{15}x^5\Big|_0^1 = \frac{A}{15}=1 \Rightarrow A=15$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx,$$

（2）故边缘密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x 15xy^2dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}5x^4, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^1 15xy^2dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\frac{15}{2}y^2(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

由于 $f_X(x)\cdot f_Y(Y)\neq f(x,y)$, 因而 X 和 Y 不相互独立。

（3）

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_y^1 15xy^2dx$$

$$=\frac{15}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}y^2[1-y^2]dy=\frac{15}{2}[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{5}y^5]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{17}{64}$$

五、证明题（5 分）

证明　因为事件 A、B 相互独立，所以 $P\{AB\}=P\{A\}P\{B\}$，于是

$$P\{\overline{A}\,\overline{B}\}=1-P\{\overline{\overline{A}\,\overline{B}}\}=1-P\{\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}\}=1-P\{A\cup B\}$$

$$=1-[P\{A\}+P\{B\}-P\{AB\}]=1-P\{A\}-[P\{B\}-P\{A\}P\{B\}]$$

$$=P\{\overline{A}\}-P\{B\}[1-P\{A\}]=P\{\overline{A}\}-P\{B\}P\{\overline{A}\}$$

$$=P\{\overline{A}\}[1-P\{B\}]=P\{\overline{A}\}P\{\overline{B}\}$$

所以 $\overline{A},\overline{B}$ 相互独立