19—20（2）《线性代数》试卷 A

一、填空题（每空格 3 分，共 18 分）

1． 2　**2**．无关　**3**． n-r　**4**． 4　**5**． -6　**6**． 6

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1． D　**2**． B　**3**． B　**4**． D　**5**． B　**6**． A

三、计算题（每题 9 分，共 36 分）

1．解：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= -20 + 93 = 73$。

2． 解：，$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 18 & -5 \\ 10 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3． 解：$\boldsymbol{A} \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & a+3 & -4 & -4 \\ 0 & 8 & b-5 & -4 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & a+3 & -4 & -4 \\ 0 & 5-a & b-1 & 0 \end{pmatrix}$

因 R（$\boldsymbol{A}$）＝2，故$\begin{cases} 5-a=0 \\ b-1=0 \end{cases}$，即$\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$。

4. 解：由于$\left|\boldsymbol{\alpha}_1 \quad \boldsymbol{\alpha}_2 \quad \boldsymbol{\alpha}_3\right| = -2$，且$\boldsymbol{\alpha}_1$的行数为3，，

则 $R\left[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right]=3$,

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是其中一个极大无关组

四、计算、讨论题（每小题 12 分，共 24 分）

1. 解：$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ，

对应方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_4 = -1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$

则特解$\eta^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 导出组基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

故方程组通解$k_1\eta_1 + k_2\eta 2 + \eta^* = k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} k_1,k_2 \in R$

2. 解：（1）由|A-λE|=$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix}$=0，

则特征值λ_1=−1，λ_2=0，$\lambda_3=9$，

对应的特征向量 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

（2）由于$[p_1,p_2]=0$，$[p_1,p_3]=0$，$[p_2,p_3]=0$，

则特征向量两两正交。

（3）令$P=\left(\frac{p_1}{\|p_1\|},\frac{p_2}{\|p_2\|},\frac{p_3}{\|p_3\|}\right)$，有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & \\ & & 9\end{pmatrix}$$

五、证明题（共 4 分）

证明：设有常数k_1,k_2,k_3使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$，

即$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0$

已知$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关

所以$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$ 解得$k_1=0,k_2=0,k_3=0$

β_1,β_2,β_3线性无关。证毕。