2019—2020（2）《高等数学 A2》试卷(A)

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．D；　2．C；　3．B；　4．A；　5．C．

二、填空题（每空 3 分，共 15 分）

6.　1；　**7.**　0 ；　**8.**　$2\pi a^7$；　**9.**　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 f(r^2) r dr$；　**10.**　-5；

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

11．解：　平面过直线 L_1，所以直线上的点 $A(1,2,3)$ 也为平面上的点

又因为　$s_1=(1,0,-1)$　　$s_2=(2,1,1)$

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$$

平面方程为　$1(x-1)-3(y-2)+1(z-3)=0$

即：　$x-3y+z+2=0$

12．解： $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow R=3$，收敛区间为 $(-3,3)$

当 $x=3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散；

当 $x=-3$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，收敛.

故该幂级数的收敛域为 $[-3,3)$.

13．解：$F_x = F_1 + F_2 \cdot (-\frac{z}{x^2}),\quad F_y = F_1 \cdot (-\frac{z}{y^2}) + F_2,$

$$F_z = F_1 \cdot (\frac{1}{y}) + F_2 \cdot (\frac{1}{x})$$

由公式可得：$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(zF_2 - x^2F_1)}{x(xF_1 + yF_2)}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(zF_1 - y^2F_2)}{y(xF_1 + yF_2)}$$

则 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y(zF_2 - x^2F_1) + x(zF_1 - y^2F_2)}{(xF_1 + yF_2)} = z - xy$

14．解：$I \overset{\text{柱面坐标}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_1^2 r^3 dz + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\sqrt{2}}^2 dr \int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^3 dz$

$$= 2\pi + \frac{8\pi}{3} = \frac{14}{3}\pi$$

15．解：$D:\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \qquad 0 \le r \le 1$，

$$\iint_D \arctan\frac{y}{x} dxdy = \iint_D r\theta dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta d\theta \int_0^1 r dr = \frac{\pi^2}{64}.$$

四、求曲线曲面积分（每题 10 分，共 20 分）

16．解：连接 $\overrightarrow{OA}$，由 $Green$ 公式得：

$$I = \int_L + \int_{\overrightarrow{OA}} - \int_{\overrightarrow{OA}} = \oint_{L+\overrightarrow{OA}} - \int_{\overrightarrow{OA}}$$

$$\overset{Green\text{公式}}{=} \iint_D (e^x \cos y - e^x \cos y + m) dxdy + 0$$

$$= m\iint_D dxdy = \frac{1}{8} m\pi a^2$$

17. 解: 将Σ分为上半部分$\Sigma_1: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$和下半部分$\Sigma_2: z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，

Σ_1, Σ_2在面xoy上的投影域都为：$D_{xy}: x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0,$

于是：$\iint\limits_{\Sigma_1} xyzdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$

$$\overset{\text{极坐标}}{=} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2 \sin\theta\cos\theta \cdot \sqrt{1-r^2} \cdot rdr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 r^3 \cdot \sqrt{1-r^2} dr = \frac{1}{15}$$

同理可得：$\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})(-dxdy) = \frac{1}{15}$，

$$\therefore I = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} = \frac{2}{15}$$

. 五、证明题（10 分）

18．证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$的部分和

$$\sigma_n = (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \ldots + n(a_n - a_{n+1})$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n) - na_{n+1}$$

$= s_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$.（$s_n$为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和）

因$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，得$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$.

又$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$，于是

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1} + \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$= s - a + 0 = s - a$存在，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$收敛.