19—20（2）《高等数学 B2/C2》试卷 A

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1．C．　**2**．D．　**3**．A．　**4**．B．　**5**．B．

6．D．　**7**．B．　**8**．C．　**9**．D．　**10**．A．

二、填空题（每小题 3 分，共 9 分）

11. $\int_0^1 dy\int_1^{2-y} f(x,y)dx$；　**12.** 6；　**13.** 1；

三、计算题（每题 9 分，共 45 分）

14．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-3y}$ ，　$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{x^2-3y}$

$$dz=\frac{2x}{x^2-3y}dx-\frac{3}{x^2-3y}dy,\quad dz|_{(2,1)}=4dx-3dy$$

15.　解法一：$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le\sqrt{x}\}$ ，

原式$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} xy^2dy$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx$

$=[\frac{2}{21}x^{\frac{7}{2}}]_0^1=\frac{2}{21}$

解法二：$D=\{(x,y)|0\le y\le 1,\ y^2\le x\le 1\}$ ，

原式$=\int_0^1 dy\int_{y^2}^1 xy^2dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1(y^2-y^6)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{7}y^7\right)|_0^1=\frac{2}{21}$

16．解：　区域$D=\{(r,\theta)|0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le r\le 2\}$，

原式$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 r^2dr$

$=\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}d\theta$

$=\frac{14\pi}{3}$

17. 解：记$a_n=\frac{1}{n3^n}$，由$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\frac{1}{3}$,

得收敛半径$R=3$.

令$|x-3|<3$，得收敛区间$0<x<6$.

当$x=0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$收敛，

当$x=6$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

故收敛域为[0,6).

18. 解：由$\begin{cases}f_x=3x^2-6x-9=0\\f_y=2y-2=0\end{cases}$得驻点$(-1,\ 1),(3,\ 1)$.

二阶导数 $f_{xx}=6x-6,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=2$.

对驻点$(-1,\ 1)$，$A=f_{xx}(-1,1)=-12, B=f_{xy}(-1,1)=0, C=f_{yy}(-1,1)=2$,

$B^2-AC=24>0$，因此$f(x,y)$在点$(-1,\ 1)$无极值.

对驻点$(3,\ 1)$，$A=f_{xx}(3,1)=12,\quad B=f_{xy}(3,1)=0, C=f_{yy}(3,1)=2$,

$B^2-AC=-24>0$且$A>0$,

因此$f(x,y)$在点$(3,\ 1)$取得极小值$f(3,1)=-9$.

四、判别题（每题 7 分，共 7 分）

19. 解： $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1=f(0,0)$,

故函数在(0,0)点连续.

五、应用题（ 1 小题，共 9 分）

20. 解：$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^n x\, cosx\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^n x\ \ dsinx$=$\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ ，$n = 0,1,2,\cdots,$

故$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$

考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$,记其和函数为$S(x)$.

$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1} x^{n+1})' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$

对上式两端同时求积分得

$S(x) = \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = -x - \ln(1-x).$

令$x = \frac{1}{2}$，得$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = -\frac{1}{2} + \ln 2.$